

Problème 1

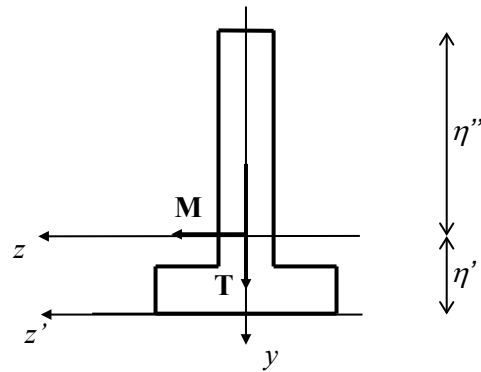
1. Schéma

Contrainte normale

$$\sigma(x) = \frac{M y}{I_z}$$

Contrainte tangentielle

$$\tau(x) = \frac{T S'(y)}{I b}$$



2. Centre de gravité et moment d'inertie

Aire de la surface

$$F = B_1 H_1 + B_2 H_2 = 0,0032 \text{ m}^2$$

Moment statique par rapport à l'axe z'

$$S_{z'} = \int_{y=0}^{-H_2} \int_{z'=-B_2/2}^{B_2/2} y \, dy \, dz' + \int_{y=-H_2}^{-H_2-H_1} \int_{z'=-B_1/2}^{B_1/2} y \, dy \, dz' = \frac{B_2}{2} H_2^2 + \frac{B_1}{2} H_1 (H_1 + 2H_2)$$

Centre de gravité

$$\eta' = \frac{S_{z'}}{F} = 35 \text{ mm}$$

$$\eta'' = H_1 + H_2 - \eta' = 65 \text{ mm}$$

Moment d'inertie

$$I_{z'} = \frac{(B_2 - B_1)H_2^3}{3} + \frac{B_1(H_1 + H_2)^3}{3} = 6,8267 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_z = I_{z'} - \eta'^2 F = 2,9067 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

3. Contraintes normales

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I_z} \eta' = 96,3 \text{ MPa} \quad \text{pour } y = +\eta'$$

$$\sigma_{\min} = -\frac{M}{I_z} \eta'' = -179 \text{ MPa} \quad \text{pour } y = -\eta''$$

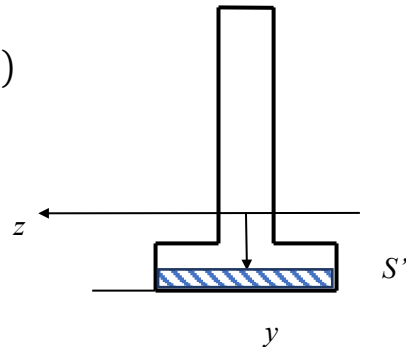
4. Contraintes tangentielles

Si $\eta' - H_2 < y \leq \eta'$

$$S'(y) = \int_{y=y}^{\eta'} \int_{z=-B_2/2}^{B_2/2} y \, dy \, dz = \frac{B_2}{2} (\eta'^2 - y^2)$$

$$b = B_2$$

$$\tau(y) = \frac{T\eta'^2}{2I} \left(1 - \left(\frac{y}{\eta'} \right)^2 \right)$$



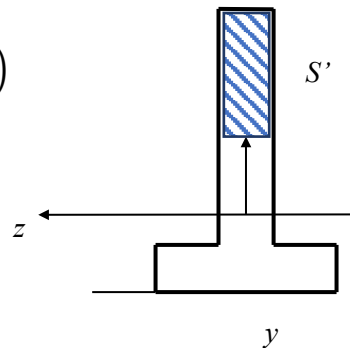
Si $-\eta'' \leq y \leq \eta' - H_2$

$$S'(y) = \int_{\eta''}^y \int_{z=-B_1/2}^{B_1/2} y \, dy \, dz = \frac{B_1}{2} (y^2 - \eta''^2)$$

$$b = B_1$$

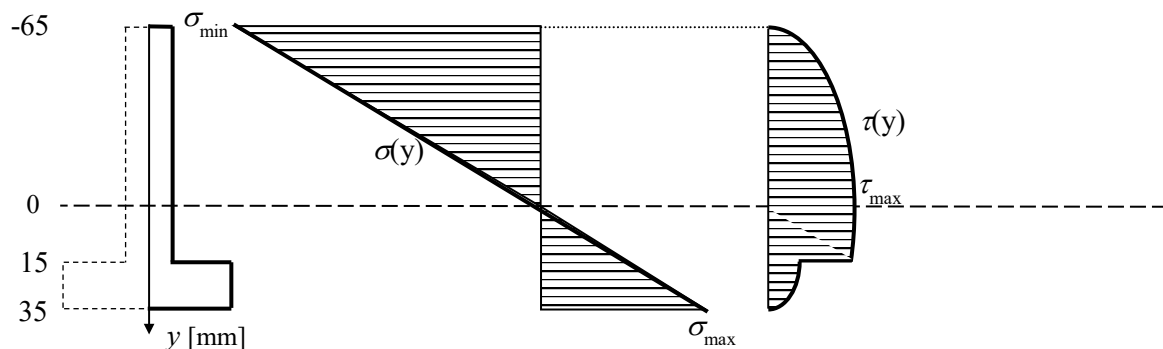
$$\tau(y) = \frac{T\eta''^2}{2I} \left(1 - \left(\frac{y}{\eta''} \right)^2 \right)$$

$$\tau_{max} = \tau(0) = \frac{T\eta''^2}{2I} = 43,6 \text{ MPa}$$



5. Diagramme des contraintes

La distribution des τ est parabolique et présente un saut à $y = \eta' - H_2 = 15 \text{ mm}$



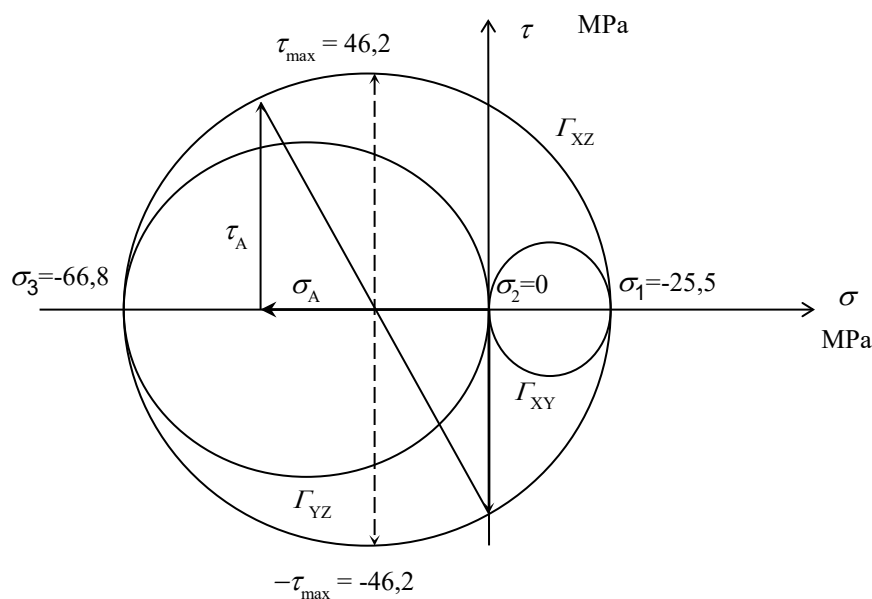
6. Cercle de Mohr au point A

Pour déterminer les cercles de Mohr au point A, il est nécessaire d'établir les contraintes normale σ et tangentielle τ en ce point:

$$\tau_A = \frac{T\eta''}{2I_z} \left(1 - \left(\frac{y_3}{\eta''} \right)^2 \right) = \frac{6 \cdot 10^4 (65 \cdot 10^{-3})^2}{2 \cdot 2,9067 \cdot 10^{-6}} \left[1 - \left(\frac{65 - 50}{65} \right)^2 \right] = 41,3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_A = \frac{M}{I_z} y_3 = \frac{8 \cdot 10^3}{2,9067 \cdot 10^{-6}} (-15 \cdot 10^3) = -41,3 \text{ MPa}$$

(L'égalité des contraintes σ_A et τ_A est purement fortuite)



Les contraintes principales sont alors données par

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_A}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_A}{2} \right)^2 + \tau_A^2} = \frac{-41,3}{2} + 46,2 = 25,5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_A}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_A}{2} \right)^2 + \tau_A^2} = -66,8 \text{ MPa}$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_A}{2} \right)^2 + \tau_A^2} = 46,2 \text{ MPa}$$

Problème2

1. La répartition de la charge P (donc un moment fléchissant) entre les deux poutres se détermine en exprimant que ces poutres ont la même ligne élastique ($y_1 = y_2$). Ainsi :

$$y_1'' = y_2'' \Rightarrow \frac{M_1(x)}{EI_1} = \frac{M_2(x)}{EI_2} \quad \text{où} \quad I_K = \frac{B_K H_K^3}{12}$$

Il s'ensuit :

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{BH^3}{12} \cdot \frac{12}{B(2H)^3} = \frac{1}{8}$$

Comme $M_1 = P_1 l$ et $M_2 = P_2 l$ avec $P_1 + P_2 = P$,

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{M_1}{M_2} = \frac{1}{8} \Rightarrow P_1 = \frac{1}{9}P \quad \text{et} \quad P_2 = \frac{8}{9}P$$

2. Contraintes normales maximums

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{M_1}{W_1} & \sigma_2 &= \frac{M_2}{W_2} & \Rightarrow & \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{M_1}{M_2} \frac{W_2}{W_1} \\ W_K &= \frac{B_K H_K^2}{6} & \Rightarrow & \frac{W_2}{W_1} = \frac{B(2H)^2}{6} \cdot \frac{6}{BH^2} = 4 \end{aligned} \right\} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{1}{2}$$

D'où

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{P_1 l}{W_1} = \frac{1}{9}Pl \frac{6}{BH^2} = \frac{2}{3} \frac{Pl}{BH^2} \\ \sigma_2 &= \frac{P_2 l}{W_2} = \frac{8}{9}Pl \frac{6}{B(2H)^2} = \frac{4}{3} \frac{Pl}{BH^2} \end{aligned}$$

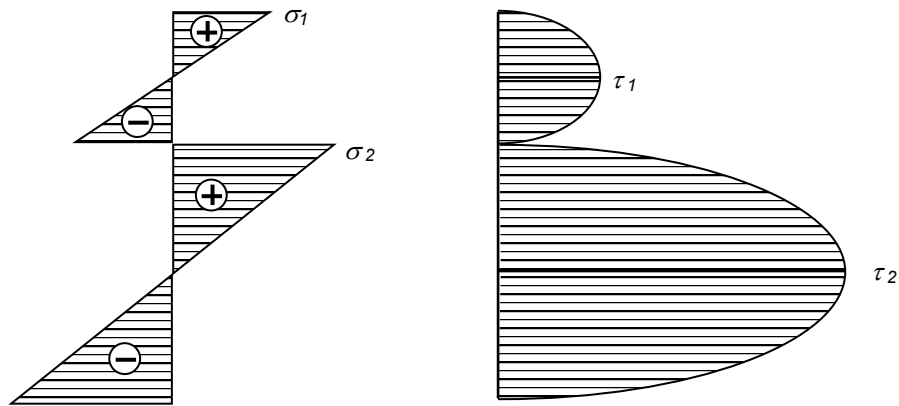
Remarque : Le rapport des contraintes normales maximums est celui des hauteurs des poutres.

3. Contraintes tangentielle maximums

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{3}{2} \frac{T_1}{F_1} & \tau_2 &= \frac{3}{2} \frac{T_2}{F_2} & \Rightarrow & \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{T_1}{T_2} \frac{F_2}{F_1} \\ F_K &= B_K H_K & \Rightarrow & \frac{F_2}{F_1} = \frac{B(2H)}{BH} = 2 \\ T_1 &= P_1 & T_2 &= P_2 & \Rightarrow & \frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{8} \end{aligned} \right\} \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{1}{4}$$

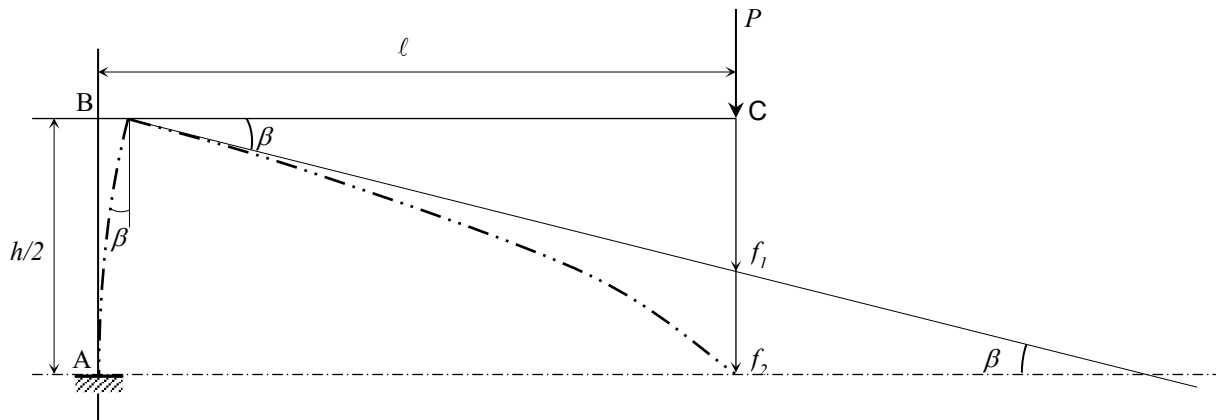
$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{3}{2} \frac{P_1}{BH} = \frac{3}{2} \frac{1}{9} \frac{P}{BH} = \frac{1}{6} \frac{P}{BH} \\ \tau_2 &= \frac{3}{2} \frac{P_2}{B(2H)} = \frac{3}{2} \frac{8}{9} \frac{P}{B(2H)} = \frac{2}{3} \frac{P}{BH} \end{aligned}$$

4. Diagrammes des contraintes



Problème3

1. Schéma de la déformation d'une moitié du système en raison de la symétrie du cadre (on ne considère que le moment de flexion)



2. Flèches et angle liés à la flexion

La force P appliquée en C crée en B le moment $P\ell$ qui y provoque la rotation

$$\beta = \frac{Pl \cdot h/2}{EI} = \frac{Plh}{2EI}$$

Cette rotation β entraîne en C la flèche

$$f_1 = \ell\beta = \frac{P\ell^2 h}{2EI}$$

La poutre horizontale peut être considérée comme encastree en B :

$$f_2 = \frac{P\ell^3}{3EI}$$

3. La flèche totale $f_1 + f_2$ doit être égale à $h/2$

$$\frac{P\ell^2 h}{2EI} + \frac{P\ell^3}{3EI} = \frac{h}{2}$$

d'où

$$P = \frac{3EIh}{\ell^2(3h+2\ell)}$$